

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ xy - 5y = 24 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ xy - 5y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2y \\ xy - 5y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 2y \\ (7 + 2y)y - 5y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 2y \\ 7y + 2y^2 - 5y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 2y \\ 2y^2 + 2y - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 2y \\ y^2 + y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3 \text{ ή } -4$$

$$\text{Για } y = 3 \text{ η } x = 7 + 2y \Leftrightarrow x = 7 + 2 \cdot 3 = 13$$

$$\text{Για } y = -4 \text{ η } x = 7 + 2y \Leftrightarrow x = 7 + 2 \cdot (-4) = -1$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι $(13, 3)$, $(-1, -4)$

2.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 12x = 7 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 12x = 7 \\ x + 2y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 + 12x = 7 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \\ &\begin{cases} 3(3 - 2y)^2 + 4y^2 + 12(3 - 2y) = 7 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \\ &\begin{cases} 3(9 - 12y + 4y^2) + 4y^2 + 36 - 24y = 7 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \\ &\begin{cases} 27 - 36y + 12y^2 + 4y^2 + 36 - 24y = 7 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \\ &\begin{cases} 16y^2 - 60y + 56 = 0 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \\ &\begin{cases} 4y^2 - 15y + 14 = 0 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Delta = 225 - 224 = 1 \quad y = \frac{15 \pm \sqrt{1}}{8} = \frac{15 \pm 1}{8} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{7}{4}$$

$$\text{Για } y = 2 \quad \eta \quad x = 3 - 2y \Leftrightarrow x = 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

$$\text{Για } y = \frac{7}{4} \quad \eta \quad x = 3 - 2y \Leftrightarrow x = 3 - 2 \cdot \frac{7}{4} = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι $(-1, 2)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

3.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) = 24 \\ x + y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x - y)4 = 24 \\ x + y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} (+): 2x = 10 \\ (-): 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

4.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 5 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ &\begin{cases} (-1)^2 - 2xy = 5 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ &\begin{cases} 1 - 2xy = 5 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ &\begin{cases} -2xy = 4 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Δύο αριθμοί με άθροισμα -1 και γινόμενο -2 είναι οι -2 , 1 .

Άρα $(x, y) = (-2, 1)$ ή $(x, y) = (1, -2)$

5.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{10}{3} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{10}{3} \\ x + y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = -10xy \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} 3x^2 + 3(2-x)^2 = -10x(2-x) \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} 3x^2 + 3(4 - 4x + x^2) = -20x + 10x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} 3x^2 + 12 - 12x + 3x^2 = -20x + 10x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} 4x^2 - 8x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

6.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2 \\ 8x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $x^2 = \kappa$, $y^2 = \lambda$ με $\kappa, \lambda \geq 0$

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 3\kappa - \lambda = 2 \\ 8\kappa - 3\lambda = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\kappa - 2 = \lambda \\ 8\kappa - 3\lambda = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 3\kappa - 2 \\ 8\kappa - 3(3\kappa - 2) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 3\kappa - 2 \\ 8\kappa - 9\kappa + 6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3\kappa - 2 \\ \kappa = -11 < 0 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

7.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ xy + y^2 = 15 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ xy + y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y) = 10 \\ y(x + y) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x + y) = 10 \\ \frac{x}{y} = \frac{10}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x + y) = 10 \\ x = \frac{10}{15}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x + y) = 10 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y\left(\frac{2}{3}y + y\right) = 10 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y \cdot \frac{5}{3}y = 10 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 9 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \quad \text{ή} \quad y = -3 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -3 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

8.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5(x + y) \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: $xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } y \neq 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5(x + y) \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5(x+y) \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Θέτουμε $x + y = \omega$ και $xy = \varphi$ **(1)**

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} \omega^2 - 2\varphi = 5\omega \\ \frac{\omega}{\varphi} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 - 2\varphi = 5\omega \\ \varphi = \frac{3}{2}\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 - 3\omega = 5\omega \\ \varphi = \frac{3}{2}\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 - 3\omega = 5\omega \\ \varphi = \frac{3}{2}\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = 8\omega \\ \varphi = \frac{3}{2}\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 8 \\ \varphi = \frac{3}{2}\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 8 \\ \varphi = 12 \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow x + y = 8$ και $xy = 12$

Δύο αριθμοί με άθροισμα 8 και γινόμενο 12 είναι οι 2, 6.

Άρα $(x, y) = (2, 6)$ ή $(x, y) = (6, 2)$

9.

Να λύσετε το σύστημα $\left(\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{5} \text{ και } 5x + 3y - 2z = 51 \right)$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Θέτουμε } \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{5} = k, \text{ τότε } \begin{cases} x-2=3k \\ y-3=4k \\ z-1=5k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3k+2 \\ y=4k+3 \\ z=5k+1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Η εξίσωση } 5x + 3y - 2z = 51 \Leftrightarrow 5(3k+2) + 3(4k+3) - 2(5k+1) = 51$$

$$15k + 10 + 12k + 9 - 10k - 2 = 51$$

$$17k = 34$$

$$k = 2$$

Οι (1) γίνονται $x = 8, \quad y = 11, \quad z = 11$

10.

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2 \\ \frac{xyz}{y+z} = \frac{6}{5} \\ \frac{xyz}{z+x} = \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ όπου } x, y, z \text{ θετικοί}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2 \\ \frac{xyz}{y+z} = \frac{6}{5} \\ \frac{xyz}{z+x} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{2} \\ \frac{y+z}{xyz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{xyz} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{zy} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Θέτουμε $\frac{1}{xy} = u, \quad \frac{1}{yz} = v, \quad \frac{1}{zx} = w \quad (1)$

Το σύστημα γίνεται: $\left(v + w = \frac{1}{2} \text{ και } w + u = \frac{5}{6} \text{ και } u + v = \frac{2}{3} \right) \quad (2)$

Προσθέτοντας τις (2) παίρνουμε $2u + 2v + 2w = 2 \Rightarrow u + v + w = 1 \quad (3)$

Αφαιρώντας τις (2) από την (3) παίρνουμε

$$\left(u = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ και } v = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \text{ και } w = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$(xy = 2 \text{ και } yz = 6 \text{ και } zx = 3) \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (4) παίρνουμε $(xyz)^2 = 36 \Leftrightarrow xyz = 6 \quad (5)$

Διαιρώντας την (5) με τις (4) παίρνουμε $z = 3 \text{ και } x = 1 \text{ και } y = 2$